9. Präsenzübung zur Analytischen Mechanik und Speziellen Relativität, WS 2016/17

(zu bearbeiten am Dienstag, 20.12.2016)

Aufgabe P18 *Erhaltungsgröße*

Eine Masse m bewege sich (in einer Ebene) im Potential $V(\rho) = -\frac{\gamma}{\rho}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion von der Form $H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{\gamma}{\rho}$ ist, und stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.

(b) Berechnen Sie $\{A_x, H\}$ für $A_x := m\,\rho^2\,\dot\varphi(\dot\varphi\,\rho\,\cos\varphi + \dot\rho\,\sin\varphi) - \alpha\cos\varphi$. Kann man durch geeignete Wahl von α erreichen, daß A_x eine Erhaltungsgröße ist? ρ, φ: Polarkoordinaten; γ, α: Konstanten.

(c) Stellen Sie eine Vermutung an darüber, um welche Größe es sich hier handelt. Können Sie Ihre Vermutung beweisen?

Aufgabe P19 *Zeitliche Entwicklung mit Poisson-Klammern*

(a) Man beweise, dass für die zeitliche Entwicklung einer beliebigen, nicht explizit zeitabhängigen Funktion $f(q(t), p(t))$ gilt

$$f(q(t), p(t)) =: f(t) = t\,\{f, H\}_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\{\{f, H\}, H\}_{t=0} + \cdots$$

Dabei muß die Hamiltonfunktion H eine Konstante der Bewegung sein, darf also nicht explizit von der Zeit abhängen.

(b) Bestimmen Sie auf diese Weise die zeitliche Entwicklung der Koordinate $q(t)$ für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Masse $m = 1$.